

NGUYỄN THUYẾT THANH

BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP

Tập 3

Phép tính tích phân. Lý thuyết chuỗi.
Phương trình vi phân

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

10 Tích phân bất định	4
10.1 Các phương pháp tính tích phân	4
10.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định	4
10.1.2 Phương pháp đổi biến	12
10.1.3 Phương pháp tích phân từng phần	21
10.2 Các lớp hàm khả tích trong lớp các hàm sơ cấp	30
10.2.1 Tích phân các hàm hữu tỷ	30
10.2.2 Tích phân một số hàm vô tỷ đơn giản	37
10.2.3 Tích phân các hàm lượng giác	48
11 Tích phân xác định Riemann	57
11.1 Hàm khả tích Riemann và tích phân xác định	58
11.1.1 Định nghĩa	58
11.1.2 Điều kiện để hàm khả tích	59
11.1.3 Các tính chất cơ bản của tích phân xác định	59
11.2 Phương pháp tính tích phân xác định	61
11.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định	78
11.3.1 Diện tích hình phẳng và thể tích vật thể	78
11.3.2 Tính độ dài cung và diện tích mặt tròn xoay	89
11.4 Tích phân suy rộng	98
11.4.1 Tích phân suy rộng cận vô hạn	98
11.4.2 Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn	107

12 Tích phân hàm nhiều biến	117
12.1 Tích phân 2-lớp	118
12.1.1 Trường hợp miền chữ nhật	118
12.1.2 Trường hợp miền cong	118
12.1.3 Một vài ứng dụng trong hình học	121
12.2 Tích phân 3-lớp	133
12.2.1 Trường hợp miền hình hộp	133
12.2.2 Trường hợp miền cong	134
12.2.3	136
12.2.4 Nhận xét chung	136
12.3 Tích phân đường	144
12.3.1 Các định nghĩa cơ bản	144
12.3.2 Tính tích phân đường	146
12.4 Tích phân mặt	158
12.4.1 Các định nghĩa cơ bản	158
12.4.2 Phương pháp tính tích phân mặt	160
12.4.3 Công thức Gauss-Ostrogradski	162
12.4.4 Công thức Stokes	162
13 Lý thuyết chuỗi	177
13.1 Chuỗi số dương	178
13.1.1 Các định nghĩa cơ bản	178
13.1.2 Chuỗi số dương	179
13.2 Chuỗi hội tụ tuyệt đối và hội tụ không tuyệt đối	191
13.2.1 Các định nghĩa cơ bản	191
13.2.2 Chuỗi đan dấu và dấu hiệu Leibnitz	192
13.3 Chuỗi lũy thừa	199
13.3.1 Các định nghĩa cơ bản	199
13.3.2 Điều kiện khai triển và phương pháp khai triển	201
13.4 Chuỗi Fourier	211
13.4.1 Các định nghĩa cơ bản	211

13.4.2	Dấu hiệu đủ về sự hội tụ của chuỗi Fourier . . .	212
14	Phương trình vi phân	224
14.1	Phương trình vi phân cấp 1	225
14.1.1	Phương trình tách biến	226
14.1.2	Phương trình đẳng cấp	231
14.1.3	Phương trình tuyến tính	237
14.1.4	Phương trình Bernoulli	244
14.1.5	Phương trình vi phân toàn phần	247
14.1.6	Phương trình Lagrange và phương trình Clairaut	255
14.2	Phương trình vi phân cấp cao	259
14.2.1	Các phương trình cho phép hạ thấp cấp	260
14.2.2	Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng	264
14.2.3	Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n (ptvptn cấp n) với hệ số hằng	273
14.3	Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với hệ số hằng	290
15	Khái niệm về phương trình vi phân đạo hàm riêng	304
15.1	Phương trình vi phân cấp 1 tuyến tính đối với các đạo hàm riêng	306
15.2	Giải phương trình đạo hàm riêng cấp 2 đơn giản nhất	310
15.3	Các phương trình vật lý toán cơ bản	313
15.3.1	Phương trình truyền sóng	314
15.3.2	Phương trình truyền nhiệt	317
15.3.3	Phương trình Laplace	320
	Tài liệu tham khảo	327

Chương 10

Tích phân bất định

10.1	Các phương pháp tính tích phân	4
10.1.1	Nguyên hàm và tích phân bất định	4
10.1.2	Phương pháp đổi biến	12
10.1.3	Phương pháp tích phân từng phần	21
10.2	Các lớp hàm khả tích trong lớp các hàm sơ cấp	30
10.2.1	Tích phân các hàm hữu tỷ	30
10.2.2	Tích phân một số hàm vô tỷ đơn giản	37
10.2.3	Tích phân các hàm lượng giác	48

10.1 Các phương pháp tính tích phân

10.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 10.1.1. Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng nào đó nếu $F(x)$ liên tục trên khoảng đó và khả vi

tại mỗi điểm trong của khoảng và $F'(x) = f(x)$.

Định lý 10.1.1. (về sự tồn tại nguyên hàm) Mọi hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên khoảng (a, b) .

Định lý 10.1.2. Các nguyên hàm bất kỳ của cùng một hàm là chỉ khác nhau bởi một hằng số cộng.

Khác với đạo hàm, nguyên hàm của hàm sơ cấp không phải bao giờ cũng là hàm sơ cấp. Chẳng hạn, nguyên hàm của các hàm e^{-x^2} , $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, ... là những hàm không sơ cấp.

Định nghĩa 10.1.2. Tập hợp mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx.$$

Nếu $F(x)$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) thì theo định lý 10.1.2

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

trong đó C là hằng số tùy ý và đẳng thức cần hiểu là đẳng thức giữa hai tập hợp.

Các tính chất cơ bản của tích phân bất định:

- 1) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$
- 2) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
- 3) $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C.$

Từ định nghĩa tích phân bất định rút ra bảng các tích phân cơ bản (thường được gọi là tích phân bảng) sau đây:

$$\text{I. } \int 0 \cdot dx = C.$$

$$\text{II. } \int 1 dx = x + C.$$

$$\text{III. } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

$$\text{V. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{VI. } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{VII. } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad -1 < x < 1.$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$$

$$\text{XII. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$

(trong trường hợp dấu trừ thì $x < -1$ hoặc $x > 1$).

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \quad |x| \neq 1.$$

Các quy tắc tính tích phân bất định:

$$1) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \neq 0.$$

$$2) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ khả vi liên tục thì $\int f(u)du = F(u) + C$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm $y = \operatorname{sign}x$ có nguyên hàm trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ và không có nguyên hàm trên mọi khoảng chứa điểm $x = 0$.

Giải. 1) Trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ hàm $y = \operatorname{sign}x$ là hằng số. Chẳng hạn với mọi khoảng (a, b) , $0 < a < b$ ta có $\operatorname{sign}x = 1$ và do đó mọi nguyên hàm của nó trên (a, b) có dạng

$$F(x) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Ta xét khoảng (a, b) mà $a < 0 < b$. Trên khoảng $(a, 0)$ mọi nguyên hàm của $\operatorname{sign}x$ có dạng $F(x) = -x + C_1$ còn trên khoảng $(0, b)$ nguyên hàm có dạng $F(x) = x + C_2$. Với mọi cách chọn hằng số C_1 và C_2 ta thu được hàm [trên (a, b)] không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Nếu ta chọn $C = C_1 = C_2$ thì thu được hàm liên tục $y = |x| + C$ nhưng không khả vi tại điểm $x = 0$. Từ đó, theo định nghĩa 1 hàm $\operatorname{sign}x$ không có nguyên hàm trên (a, b) , $a < 0 < b$. ▲

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm của hàm $f(x) = e^{|x|}$ trên toàn trục số.

Giải. Với $x \geq 0$ ta có $e^{|x|} = e^x$ và do đó trong miền $x > 0$ một trong các nguyên hàm là e^x . Khi $x < 0$ ta có $e^{|x|} = e^{-x}$ và do vậy trong miền $x < 0$ một trong các nguyên hàm là $-e^{-x} + C$ với hằng số C bất kỳ.

Theo định nghĩa, nguyên hàm của hàm $e^{|x|}$ phải liên tục nên nó

phải thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-e^{-x} + C)$$

tức là $1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$.

Như vậy

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{nếu } x > 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0, \\ -e^{-x} + 2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

là hàm liên tục trên toàn trục số. Ta chứng minh rằng $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $e^{|x|}$ trên toàn trục số. Thật vậy, với $x > 0$ ta có $F'(x) = e^x = e^{|x|}$, với $x < 0$ thì $F'(x) = e^{-x} = e^{|x|}$. Ta còn cần phải chứng minh rằng $F'(0) = e^0 = 1$. Ta có

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-e^{-x} + 2 - 1}{x} = 1.$$

Như vậy $F'_+(0) = F'_-(0) = F'(0) = 1 = e^{|x|}$. Từ đó có thể viết:

$$\int e^{|x|} dx = F(x) + C = \begin{cases} e^x + C, & x > 0 \\ -e^{-x} + 2 + C, & x < 0. \blacktriangle \end{cases}$$

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm có đồ thị qua điểm $(-2, 2)$ đối với hàm $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

Giải. Vì $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ nên $\ln|x|$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{x}$. Do vậy, nguyên hàm của f là hàm $F(x) = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Hằng số C được xác định từ điều kiện $F(-2) = 2$, tức là $\ln 2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 2$. Như vậy

$$F(x) = \ln|x| + 2 - \ln 2 = \ln \left| \frac{x}{2} \right| + 2. \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau đây:

$$1) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx, \quad 2) \int \frac{2x+3}{3x+2} dx.$$

Giải. 1) Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \left(2 \frac{2^x}{10^x} - \frac{5^x}{5 \cdot 10^x} \right) dx = \int \left[2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{5} \right)^x dx - \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx \\ &= 2 \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^x}{\ln \left(\frac{1}{5} \right)} - \frac{1}{5} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 2^x \ln 2} + C. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \left(x + \frac{3}{2} \right)}{3 \left(x + \frac{2}{3} \right)} dx = \frac{2}{3} \frac{\left[\left(x + \frac{2}{3} \right) + \frac{5}{6} \right]}{\left(x + \frac{2}{3} \right)} dx \\ &= \frac{2}{3} x + \frac{5}{9} \ln \left| x + \frac{2}{3} \right| + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau đây:

$$1) \int \operatorname{tg}^2 x dx, \quad 2) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx, \quad 3) \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

Giải. 1)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \end{aligned}$$