NGUYỄN THUỶ THANH

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP

Tập 3

Phép tính tích phân. Lý thuyết chuỗi.
Phương trình vi phân

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Chương 10

Tích phân bất định

10.1 Các phương pháp tính tích phân

10.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 10.1.1. Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng nào đó nếu $F(x)$ liên tục trên khoảng đó và khả vi tại mỗi điểm trong của khoảng và $F'(x) = f(x)$.

Định lý 10.1.1. (về sự tồn tại nguyên hàm) *Mọi hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên khoảng (a, b).*

Định lý 10.1.2. *Các nguyên hàm bất kỳ của cùng một hàm là chỉ khác nhau bởi một hằng số cộng.*

Khác với đạo hàm, nguyên hàm của hàm sơ cấp không phải bao giờ cũng là hàm sơ cấp. Chẳng hạn, nguyên hàm của các hàm e^{-x^2}, $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$, $\dfrac{1}{\ln x}$, $\dfrac{\cos x}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$,... là những hàm không sơ cấp.

Định nghĩa 10.1.2. Tập hợp mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx.$$

Nếu $F(x)$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) thì theo định lý 10.1.2

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

trong đó C là hằng số tùy ý và đẳng thức cần hiểu là đẳng thức giữa hai tập hợp.

Các tính chất cơ bản của tích phân bất định:

1) $d\Big(\displaystyle\int f(x)dx\Big) = f(x)dx$.

2) $\Big(\displaystyle\int f(x)dx\Big)' = f(x)$.

3) $\displaystyle\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$.

Từ định nghĩa tích phân bất định rút ra bảng các tích phân cơ bản (thường được gọi là tích phân bảng) sau đây:

I. $\int 0.dx = C.$

II. $\int 1dx = x + C.$

III. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1$

IV. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ \ x \neq 0.$

V. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1);\ \ \int e^x dx = e^x + C.$

VI. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

VII. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

VIII. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

IX. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg} x + C,\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

X. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad -1 < x < 1.$

XI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C, \\ -\mathrm{arccotg} x + C. \end{cases}$

XII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$
(trong trường hợp dấu trừ thì $x < -1$ hoặc $x > 1$).

XIII. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C,\ |x| \neq 1.$

Các quy tắc tính tích phân bất định:

1) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k \neq 0$.

2) $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3) Nếu $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ khả vi liên tục thì $\displaystyle\int f(u)du = F(u) + C$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm $y = \mathrm{sign}x$ có nguyên hàm trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ và không có nguyên hàm trên mọi khoảng chứa điểm $x = 0$.

Giải. 1) Trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ hàm $y = \mathrm{sign}x$ là hằng số. Chẳng hạn với mọi khoảng (a, b), $0 < a < b$ ta có $\mathrm{sign}x = 1$ và do đó mọi nguyên hàm của nó trên (a, b) có dạng

$$F(x) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Ta xét khoảng (a, b) mà $a < 0 < b$. Trên khoảng $(a, 0)$ mọi nguyên hàm của $\mathrm{sign}x$ có dạng $F(x) = -x + C_1$ còn trên khoảng $(0, b)$ nguyên hàm có dạng $F(x) = x + C_2$. Với mọi cách chọn hằng số C_1 và C_2 ta thu được hàm [trên (a, b)] không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Nếu ta chọn $C = C_1 = C_2$ thì thu được hàm liên tục $y = |x| + C$ nhưng không khả vi tại điểm $x = 0$. Từ đó, theo định nghĩa 1 hàm $\mathrm{sign}x$ không có nguyên hàm trên (a, b), $a < 0 < b$. ▲

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm của hàm $f(x) = e^{|x|}$ trên toàn trục số.

Giải. Với $x \geqslant 0$ ta có $e^{|x|} = e^x$ và do đó trong miền $x > 0$ một trong các nguyên hàm là e^x. Khi $x < 0$ ta có $e^{|x|} = e^{-x}$ và do vậy trong miền $x < 0$ một trong các nguyên hàm là $-e^{-x} + C$ với hằng số C bất kỳ.

Theo định nghĩa, nguyên hàm của hàm $e^{|x|}$ phải liên tục nên nó phải thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{x\to 0+0} e^x = \lim_{x\to 0-0} (-e^{-x} + C)$$

tức là $1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$.

Như vậy

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{nếu } x > 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0, \\ -e^{-x} + 2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

là hàm liên tục trên toàn trục số. Ta chứng minh rằng $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $e^{|x|}$ trên toàn trục số. Thật vậy, với $x > 0$ ta có $F'(x) = e^x = e^{|x|}$, với $x < 0$ thì $F'(x) = e^{-x} = e^{|x|}$. Ta còn cần phải chứng minh rằng $F'(0) = e^0 = 1$. Ta có

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$
$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{-e^{-x} + 2 - 1}{x} = 1.$$

Như vậy $F'_+(0) = F'_-(0) = F'(0) = 1 = e^{|x|}$. Từ đó có thể viết:

$$\int e^{|x|}dx = F(x) + C = \begin{cases} e^x + C, & x < 0 \\ -e^{-x} + 2 + C, & x < 0. \end{cases} \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm có đồ thị qua điểm $(-2, 2)$ đối với hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

Giải. Vì $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ nên $\ln|x|$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Do vậy, nguyên hàm của f là hàm $F(x) = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Hằng số C được xác định từ điều kiện $F(-2) = 2$, tức là $\ln 2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 2$. Như vậy

$$F(x) = \ln|x| + 2 - \ln 2 = \ln\left|\frac{x}{2}\right| + 2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau đây:

$$1)\quad \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx, \qquad 2)\quad \int \frac{2x+3}{3x+2}dx.$$

Giải. 1) Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \Big(2\frac{2^x}{10^x} - \frac{5^x}{5\cdot 10^x}\Big)dx = \int \Big[2\Big(\frac{1}{5}\Big)^x - \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^x\Big]dx \\ &= 2\int \Big(\frac{1}{5}\Big)^x dx - \frac{1}{5}\int \Big(\frac{1}{2}\Big)^x dx \\ &= 2\frac{\Big(\frac{1}{5}\Big)^x}{\ln\Big(\frac{1}{5}\Big)} - \frac{1}{5}\frac{\Big(\frac{1}{2}\Big)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{5^x\ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x\ln 2} + C. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\Big(x+\frac{3}{2}\Big)}{3\Big(x+\frac{2}{3}\Big)}dx = \frac{2}{3}\frac{\Big[\Big(x+\frac{2}{3}\Big)+\frac{5}{6}\Big]}{\Big(x+\frac{2}{3}\Big)}dx \\ &= \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln\Big|x+\frac{2}{3}\Big| + C. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau đây:

$$1)\quad \int \mathrm{tg}^2 x dx, \qquad 2)\quad \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx, \qquad 3)\quad \int \sqrt{1-\sin 2x}dx.$$

Giải. 1)

$$\begin{aligned} \int \mathrm{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C. \end{aligned}$$